ALGUNAS SOLUCIONES A LOS 30 EJERCICIOS SELECCIONADOS

Queridos alumnos,

En las páginas que siguen podeis encontrar escaneado algún material (personal y por ende con erratas y errores, quizás?) correspondiente a algunos de los problemas marcados con 'ESCANEAR SOLUCIÓN' en la hoja 'SELECCION DE 30 PROBLEMAS'. Hay también algunos problemas que si bien no responden exactamente a la lista, si proporcionan ideas similares a los de la lista.

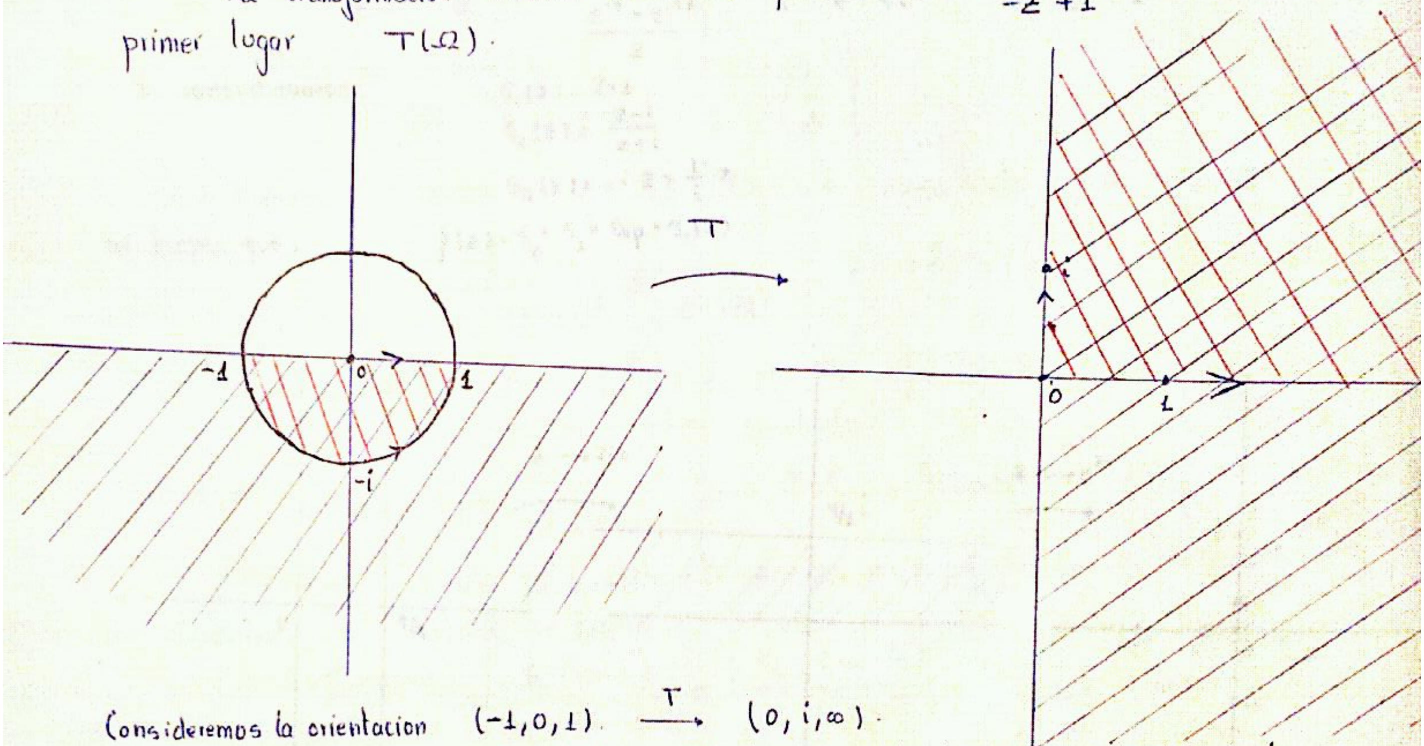
Utilizar el material bajo vuestra responsabilidad.
FELICES FIESTAS y LO MEJOR PARA 2012.

Bernardo Cascales y Salvador Sánchez-Pedreño.
27 de Diciembre de 2012.

37 **EJERCICIO.-** Consideremos $S(z) = \frac{z-i}{z+i}$ y sea T la transformación inversa. Sea $\Omega = \{ z \in \mathbb{C} : |z|<1 , \operatorname{Im} z < 0 \}$ y sea $f(z) = \frac{(Tz)^2 - i}{(Tz)^2 + i}$. Probar que f es una biyección conforme de Ω sobre un abierto $f(\Omega)$ que se determinará.

Resolución:

La transformación inversa viene dada por $Tz = \frac{i(z+1)}{-z+1}$. Calculemos en primer lugar $T(\Omega)$.



Consideremos la orientacion $(-1,0,1) \xrightarrow{T} (0,i,\infty)$.

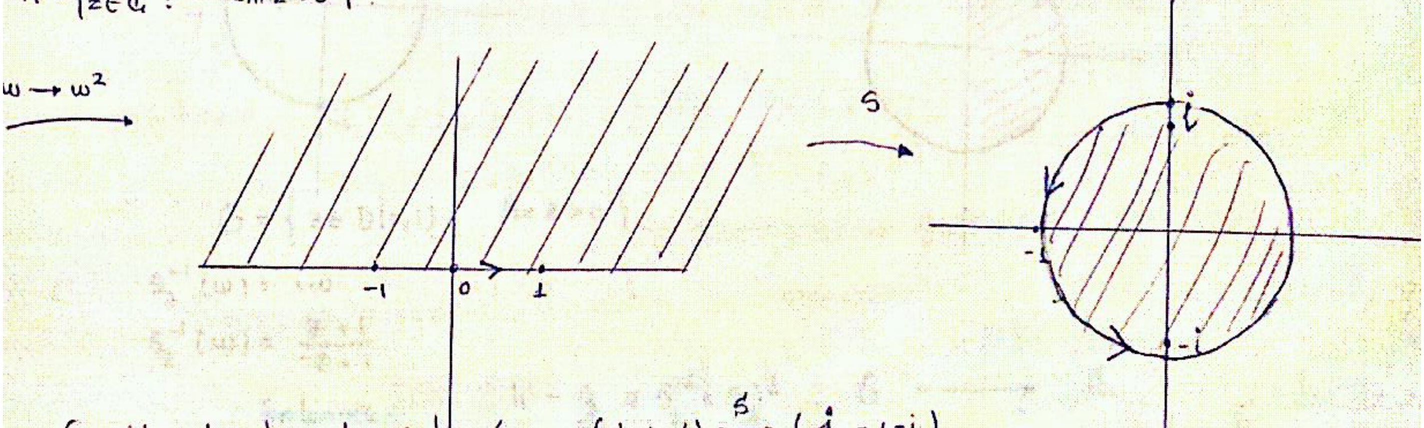
$T(-1) = 0 \qquad T(0) = i \qquad T(1) = \infty$. T lleva el semiplano de abajo al semiplano de la derecha.

Consideremos la orientación en el circulo. $(-1,-i,1) \xrightarrow{T} (0, 1, \infty)$. T lleva el circulo al semiplano de arriba.

$T(-i) = 1$

Asi $T(\Omega)$ es el cuadrante $G = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Real} z > 0 , \operatorname{Im} z > 0 \}$.

Es claro que $w \longrightarrow w^2$ establece una biyección conforme de G sobre el semiplano $H = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0 \}$.



Considerando ahora la orientación $(-1,0,1) \xrightarrow{S} (i,-1,-i)$

$S(1) = -i \qquad S(0) = -1 \qquad S(-1) = i$

Luego $f(\Omega) = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}$; y esta claro que al ser todos los factores de f una biyección conforme f, es una biyección conforme de Ω sobre el disco unidad. #

$\boxed{M.36}$ **EJERCICIO.-** Probar que $f(z) = tg\, z$ establece una biyección conforme del abierto $\Omega = \{z{:}x+iy \in \mathbb{C} : 0 < x < \pi/4\}$ sobre el abierto $G = f(\Omega)$, que se determinara. Obtener ahora una biyección conforme de G sobre el abierto $A = \{z = re^{i\theta} : r > 0,\ 0 < \theta < \pi/4\}$

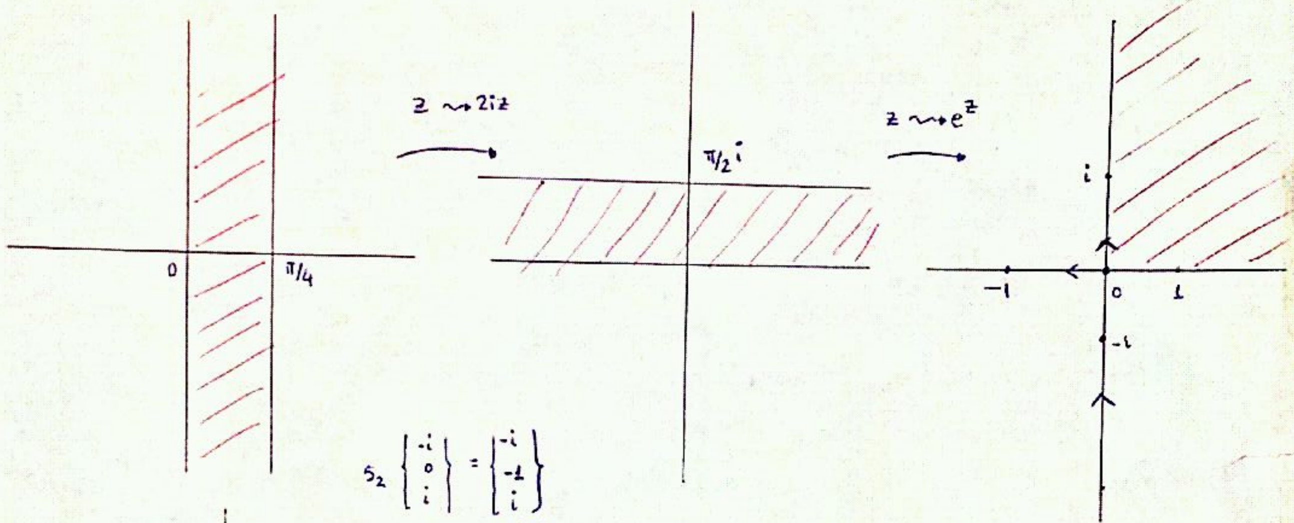
Resolución:

$$f(z) = tg\, z = \frac{\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}{\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}$$

Si consideramos:

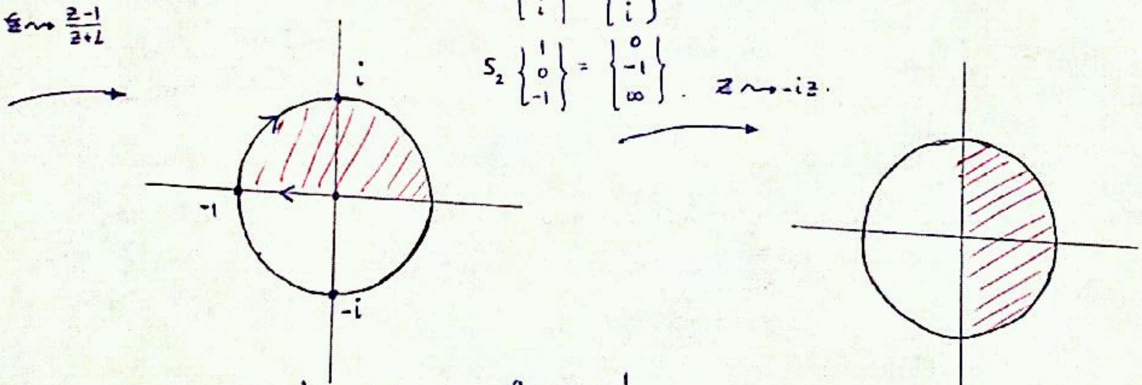
$$S_1(z) = 2iz$$
$$S_2(z) = \frac{z-1}{z+1}$$
$$S_3(z) = -iz = \frac{1}{i} z.$$

Se tiene que, $f(z) = S_3 \circ S_2 \circ \operatorname{Exp} \circ S_1(z)$



$$S_2 \begin{Bmatrix} -i \\ 0 \\ i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -i \\ -1 \\ i \end{Bmatrix}$$

$$S_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ \infty \end{Bmatrix}$$



$G = \{z \in D(0,1) : \operatorname{Re} z > 0\}$

$S_3^{-1}(w) = iw.$

$S_2^{-1}(w) = \dfrac{z+1}{-z+1}$

Entonces $\quad h = g \circ S_2^{-1} \circ S_3^{-1} : G \longrightarrow \mathbb{C}$

donde g es la determinación principal de $\sqrt{z}$ (positiva) en $\mathbb{C} - \{0\}$

Es evidente que $h(G) = A$ y que h es biyección conforme, puesto que cada factor lo es. ∎

(C234) Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,R))$ no cte. tal que $|f(z)| \le M$ para todo $z \in D(0,R)$. Pruébese que si $f(a)=b$ y $f(a)=b$ entonces para cada $z \in D(0,R)$ se cumple

$$\left|\frac{M(f(z)-f(a))}{M^2-\bar{b}f(z)}\right| \le \left|\frac{R(z-a)}{R^2-\bar{a}z}\right|$$

Dedúzcase de lo anterior que si $M=R=1$, para todo $z \in D(0,1)$ se cumple

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \le \frac{1}{1-|z|^2} \qquad \forall z \in D(0,1).$$

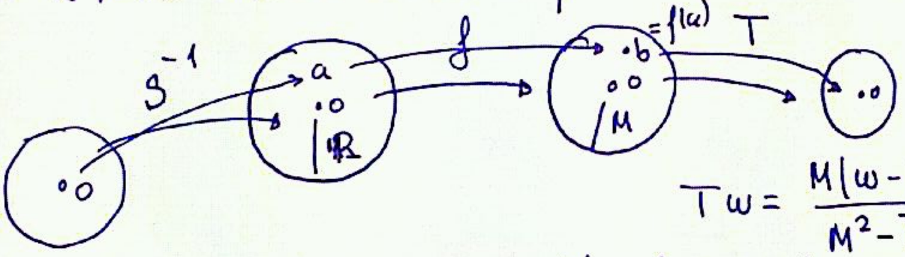
Resolución.- Observar que si f es no cte $\rightsquigarrow$ $f(D(0,R)) \subset D(0,M)$ y así todos los cocientes tienen sentido.

Observar: $w \xrightarrow{S} \dfrac{R(w-a)}{R^2-\bar{a}w}$ lleva de forma biyectiva $D(0,R) \to D(0,1)$.

$|a|<R$. Basta para ello utilizar las propiedades de las transformaciones de Mobiüs. Si $|w|=R$ se tiene

$$\left|\frac{R(w-a)}{R^2-\bar{a}w}\right| = \left|\frac{R(w-a)}{w\cdot\bar{w}-\bar{a}w}\right| = \left|\frac{R}{w}\,\frac{(w-a)}{(\bar{w}-\bar{a})}\right| = \frac{R}{|w|}\,\frac{|w-a|}{|\bar{w}-\bar{a}|} = 1.$$

y como $a \mapsto 0$ entonces es una biyección.



$$Tw = \frac{M(w-b)}{M^2-\bar{b}w}.$$

$T \circ f \circ S^{-1}(0) = 0$ $\rightsquigarrow$ está en las condiciones del lema de Schwarz.

y por tanto $|T\circ f\circ S^{-1}(w)| \le |w|$ $\forall z \in D(0,1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall z \in D(0,R)$ $z = S^{-1}(w)$ $\rightsquigarrow$ $|T\circ f(w)| \le |S(w)|$ y esto da la desigualdad que se quiere.

Ahora en la fórmula de antes, se tiene que:

$$\left|\frac{f(z)-f(a)}{1-\overline{f(a)}f(z)}\right| \le \frac{|z-a|}{|1-\bar{a}z|} \rightsquigarrow \frac{\left|\dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}\right|}{|1-\overline{f(a)}f(z)|} \le \frac{1}{|1-\bar{a}z|}$$

haciendo $z \to a$ se tiene

$$\frac{|f'(a)|}{1-|f(a)|^2} \le \frac{1}{1-|a|^2} \qquad \forall a \in D(0,1) \;\#$$

2/ 1.49 Definir explicitamente con un desarrollo en serie de potencias un logaritmo analítico de $\frac{1+z}{1-z}$ en $D(0,1)$.

RESOLUCIÓN:

a) Interpretación esto tiene logaritmo ya que $T(z) = \frac{1+z}{1-z}$ lleva el interior del disco al semiplano de la derecha por lo tanto se pueden componer con la determinación principal del logaritmo.

$$\mathrm{Log}\, \frac{1+z}{1-z}$$ que nos daría un logaritmo de $\frac{1+z}{1-z}$ en $|z|<1$

b) Directamente utilizando el ejercicio que hemos hecho se tiene que, sería

$$\left.\begin{aligned} T(z) &= \frac{1+z}{1-z} \\ T'(z) &= \frac{(1-z)+(1+z)}{(1-z)^2} \end{aligned}\right\} = \frac{2}{(1-z)^2} \qquad T(z) \neq 0 \quad \text{para todo } z \in D(0,1)$$

Entonces $\frac{T'(z)}{T(z)} = \frac{2}{(1-z)(1+z)} = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{1+z}$ de donde

$$A(1+z) + B(1-z) = 2 \quad \Rightarrow \quad z=1 \quad 2A = 2 \quad \Rightarrow A = 1$$
$$\Rightarrow \quad z=-1 \quad 2B = 2 \quad \Rightarrow B = 1$$

Así $\frac{T'(z)}{T(z)} = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} = \sum_{n\geq 0} z^n + \sum_{n\geq 0} (-1)^n z^n =$

$= \sum_{n\geq 0} (1+(-1)^n) z^n$ por lo tanto ; si calculamos

$F(z)$ una primitiva de la serie, esto es

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{1+(-1)^n}{n+1} z^{n+1}$$ esta $F(z)$ modificada en una constante ha de ser un logaritmo. De otra forma "mas elegante", se tiene

$$\frac{T'(z)}{T(z)} = 2 + 2z^2 + \cdots + 2z^{2n} + \cdots = 2 \cdot \sum_{n\geq 0} z^{2n}$$

Por lo tanto una primitiva es

$$\boxed{F(z) = 2 \cdot \sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}}$$

y así $F(z)$ modificada a lo mas en una constante es un logaritmo de $\frac{1+z}{1-z}$.

Por un procedimiento análogo se tiene que,

$$e^{F(z)} = K \, \frac{z+1}{1-z}$$

de donde se obtiene,

$$1 = e^0 = \lim_{z\to 0} e^{F(z)} = K \, \frac{z+1}{1-z} = K,$$ y así queda probado que $F(z)$ es un logaritmo de $\frac{1+z}{1-z}$

L2.130

EJERCICIO 11.-

Sea $f(z) = \dfrac{\pi \operatorname{cotg} \pi z}{z^{2m}}$ Considerando las integrales

$$\int_{C_n} f(z)\,dz \quad \text{con} \quad C_n(\theta) = \left(n+\tfrac{1}{2}\right) e^{i\theta} \quad (0 \le \theta \le 2\pi)$$

$\operatorname{Res}(f,0)$. Como aplicación obtener $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ y calcular

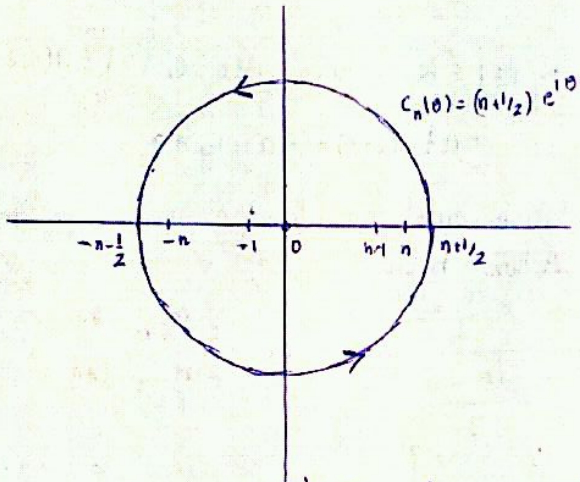
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

RESOLUCION:

Estudiemos en primer lugar la funcion $\pi \operatorname{cotg} \pi z = \pi \dfrac{\cos \pi z}{\operatorname{sen} \pi z}$.
esta función tiene polos simples en los enteros $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
Así para evaluar la integral por el teorema de los residuos tenemos que

$$\int_{C_n} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{K=-n}^{n} \operatorname{Res}(f(z), K) =$$

$$= 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f(z), 0) + \sum_{\substack{K=-n \\ K \neq 0}}^{n} \operatorname{Res}(f(z), K) \right).$$



Calculemos ahora el $\operatorname{Res}(f(z), K)$ $K \neq 0$.
Para $K \neq 0$ $f(z)$ presenta un polo simple y por lo tanto su residuo vale,

$$\lim_{z \to K} (z-K) \frac{\pi \operatorname{cotg} \pi z}{z^{2m}} = \lim_{z \to K} (z-K) \frac{\pi \cos \pi z}{z^{2m} \operatorname{sen} \pi z} =$$

$$= \begin{cases} K = \pm 2, \pm 4, \dots & = \lim_{z \to K} (z-K) \dfrac{\pi \cos \pi z}{z^{2m} \operatorname{sen}(\pi z - \pi K)} = \lim_{z \to K} \dfrac{\cancel{\pi (z-K)} \cos \pi z}{z^{2m} \cancel{\pi (z-K)} \left(1 - \frac{(z-K)^2}{3!} + \dots\right)} = \dfrac{1}{K^{2m}} \\[2ex] K = \pm 1, \pm 3, \dots & = \lim_{z \to K} (z-K) \dfrac{\pi \cos \pi z}{-z^{2m} \operatorname{sen}(\pi z - \pi n)} = \lim_{z \to K} \dfrac{\cancel{\pi (z-K)} \cos \pi z}{-z^{2m} \cancel{\pi (z-K)} \left(1 - \frac{(z-K)^2}{3!}\right)} = \dfrac{\cos \pi K}{-K^{2m}} = \dfrac{1}{K^{2m}} \end{cases}$$

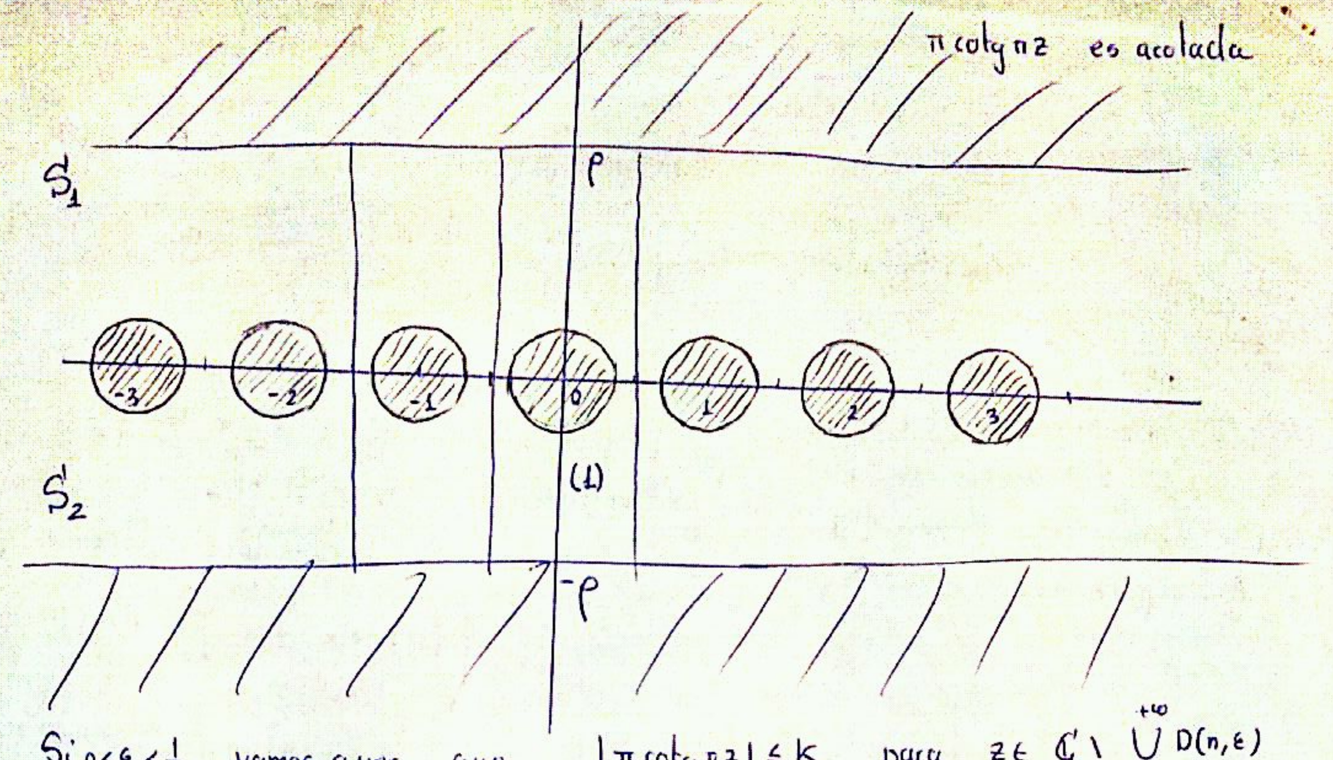
Por lo tanto se tiene.

$$\int_{C_n} f(z)\,dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f(z), 0) + \sum_{\substack{K=-n \\ K \neq 0}}^{n} \frac{1}{K^{2m}} \right) = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f(z), 0) + 2\sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K^{2m}} \right)$$

Así si probamos que $\lim_{n} \int_{C_n} f(z)\,dz = 0$, quedara que

$$\operatorname{Res}(f(z), 0) = -2 \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{K^{2m}}$$

con lo cual tendremos evaluado el residuo. Para ver que el limite de esta integral es cero ~~antes~~ veremos que la funcion $\pi \operatorname{cotg} \pi z$ esta acotada en un recinto adecuado.



Si $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ vamos a ver que $|\pi \operatorname{cotg} \pi z| \leq K$ para $z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} D(n,\varepsilon)$

Como $\pi \operatorname{cotg} \pi z = \pi \dfrac{\cos \pi z}{\operatorname{sen} \pi z}$ y $\pi \cot \pi(-z) = -\pi \operatorname{cotg} \pi z$.

queda claro que sera suficiente ver la acotación en el semiplano superior, es decir en $\left(\mathbb{C} \setminus \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} D(n,\varepsilon)\right) \cap \{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Ahora bien.

$$\pi \operatorname{cotg} \pi z = \pi \frac{\cos \pi z}{\operatorname{sen} \pi z} = \pi \frac{\frac{e^{iz\pi}+e^{-iz\pi}}{2}}{\frac{e^{iz\pi}-e^{-iz\pi}}{2i}} = \pi i \frac{e^{iz\pi}+e^{-iz\pi}}{e^{iz\pi}-e^{-iz\pi}} =$$

$$= \pi i \frac{e^{2iz\pi}+1}{e^{2iz\pi}-1} = \pi i \left[1 + \frac{2}{e^{2\pi i z}-1}\right]$$

Si $z = x+iy$ se tiene que

$$|e^{2\pi i z}| = |e^{-2\pi y + 2\pi i x}| = e^{-2\pi y} \xrightarrow[y \to +\infty]{} 0.$$

Por lo tanto existe ρ: $y>\rho$ se tiene que $|e^{2\pi i z}-1| > \frac{1}{2}$

$$|\pi \operatorname{cotg} \pi z| \leq \pi \left(1 + \frac{2}{|e^{2\pi i z}-1|}\right) \leq 5\pi.$$

Pero como $|\pi \operatorname{cotg} \pi z|$ es periodica de periodo 1, sera suficiente ver que es acotada en en el rectangulo (1) (quitandole la bola), las cuentas y esa cota valdra para todos los otros. Que es acotada en (1) es evidente puesto que es un compacto, y toda función continua en un compacto es acotada.

Consecuentemente, $\exists$ K constante tal que

$$|\pi \operatorname{cotg} \pi z| \leq K \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} D(n,\varepsilon).$$

Asi volviendo al calculo de la integral esta claro con

$C_n(\theta) \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} D(k,\varepsilon)$ para $n \in \mathbb{N}$ y para $0 \leq \theta \leq 2\pi$

con lo cual se tiene que

$$\left|\int_{C_n} f(z)dz\right| = \left|\int_{C_n} \frac{\pi \operatorname{cotg} \pi z}{z^{2m}} dz\right| = \left|\int_0^{2\pi} \frac{\pi \operatorname{cotg} C_n(\theta)}{(n+1/2)^{2m} e^{2mi\theta}} \cdot i(n+1/2)e^{i\theta} d\theta\right| \leq$$

$$\leq \int_0^{2\pi} \frac{|\pi \operatorname{cotg} C_n(\theta)|}{(n+1/2)^{2m-1}} d\theta \leq 2\pi \frac{K}{(n+1/2)^{2m-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ cuando } .$$

y por lo tanto queda probado lo que pretendíamos.

Como aplicación vamos a calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Se tiene que $\operatorname{Res}(f(z),0) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ siendo $f(z) = \frac{\pi \operatorname{cotg}\pi z}{z^2}$. Como $f(z)$ presenta un polo de orden 3 en $z=0$, tendremos.

$$\operatorname{Res}(f(z),0) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} w^3 f(w)\Big|_z = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0} (\pi z \operatorname{cotg}\pi z)''.$$

Se tiene derivando que,

$$\operatorname{Res}(f(z),0) = \frac{1}{2}\cdot \lim_{z\to 0} 2\pi^2 \left(\frac{\pi z \cos\pi z - \operatorname{sen}\pi z}{\operatorname{sen}^3 \pi z}\right) =$$

$$= \pi^2 \lim_{z\to 0} \frac{\pi z\left(1 - \frac{(\pi z)^2}{2} + \cdots\right) - \left(\pi z - \frac{(\pi z)^3}{3!} + \cdots\right)}{\left(\pi z - \frac{(\pi z)^3}{3!} + \cdots\right)^3} = \pi^2 \lim_{z\to 0} \frac{(\pi z)^3\left[\left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2}\right) + \cdots\right]}{(\pi z)^3 (1 - \cdots)}$$

$$= \pi^2 \cdot \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!}\right) = \pi^2\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) = \pi^2\left(\frac{1}{6} - \frac{3}{6}\right) = -\pi^2 \frac{2}{6} = -\frac{\pi^2}{3}$$

y por lo tanto se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6$ ∎

Observar que para $m\in\mathbb{N}$ se tiene que $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m}} = -\frac{1}{2}\operatorname{Res}\left(\frac{\pi \operatorname{cotg}\pi z}{z^{2m}}, 0\right)$.

Pero $\frac{\pi \operatorname{cotg}\pi z}{z^{2m}}$ tiene un polo de orden $2m+1$ en $z=0$, y por lo tanto: se tiene

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\pi \operatorname{cotg}\pi z}{z^{2m}}, 0\right) = \frac{1}{(2m)!}\frac{d^{2m}}{dz^{2m}}[\pi z \operatorname{cotg}\pi z].$$

con lo cual es aconsejable tener el desarrollo en serie de potencias de $\pi z \operatorname{cotg}\pi z$ alrededor de $z=0$.

$$\pi z \operatorname{cotg}\pi z = \pi z \frac{\frac{e^{i\pi z}+e^{-i\pi z}}{2}}{\frac{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}}{2i}} = i\pi z \frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1} = i\pi z\left(1 + \frac{2}{e^{2iz\pi}-1}\right) = \pi i z + \frac{2\pi i z}{e^{2\pi i z}-1}$$

Si conociéramos el desarrollo de $\frac{w}{e^w - 1}$ tendríamos el de $\pi z \operatorname{cotg}\pi z$. en $z=0$

$$\frac{w}{e^w-1} = \frac{w}{w + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \cdots} = \frac{1}{1 + \frac{w}{2!} + \frac{w^2}{3!} + \cdots} = \left(B_0 + B_1 w + \frac{B_2}{2!}w^2 + \frac{B_3}{3!}w^3 + \cdots\right) \text{ que son}$$

$$\left(1 + \frac{w}{2!} + \frac{w^2}{3!} + \cdots\right)\left(B_0 + B_1 w + \frac{B_2}{2!}w^2 + \cdots\right) = 1. \text{ y donde se desarrolle}$$

fáciles de obtener; obsérvese que $0 = B_0 + \binom{n+1}{1}B_1 + \cdots + \binom{n+1}{n}B_n$

$B_0 = 1,\ B_1 = -1/2,\ B_2 = 1/6,\ B_3 = 0,\ B_4 = -1/30$

y así se tiene que

$$\pi z \operatorname{cotg}\pi z = \pi i z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}(2\pi i z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}(-1)^n (2\pi z)^{2n}}{(2n)!} \text{ y por lo}$$

tanto $\operatorname{Res}(\ ) = \frac{1}{(2m)!}\frac{d^{2m}}{dz^{2m}}[\pi z \operatorname{cotg}\pi z] = \frac{B_{2m}(-1)^m 2^{2m}\pi^{2m}}{(2m)!}$

$m=2 \Rightarrow \operatorname{Res}(\cdot) = \frac{B_4 \cdot (-1)^2}{4!} \cdot 2^4 \cdot \pi^4 = -\frac{\pi^4 \cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{30\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = -\frac{\pi^4}{45} \Rightarrow \sum \frac{1}{n^4} = \pi^4/90$

$A \subset \mathbb{C}$ finito, $0 \notin A$.

$B = \{ b \in \mathbb{C} : b^2 \in A \}$. Entonces $0 \notin B$.

Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus A)$ y $g(z) := z f(z^2)$, $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus B)$.

En todo demostraremos $h(z) = z^2$. Así, $g(z) = z f(h(z))$.

CASO 1. Singularidad evitable.

Sea $a \in A$ y $b \in B$, $b^2 = a$.

"$\Longrightarrow$" Si f presenta una singularidad evitable en a.

Entonces, existe $r > 0$ tal que f no contiene otras singularidades en $D^*(a,r)$ y f es acotada en $D^*(a,r)$.
Como $h(b) = b^2 = a$ y h es continua, existe $\rho > 0$ tal que $h(D(b,\rho)) \subset D(a,r)$, luego $g(z)$ es acotada en $D^*(b,\rho)$ e.d. b es singularidad evitable de g.

"$\Longleftarrow$" Ahora supongamos que g posee una singularidad evitable en b; e.d. existe $\delta > 0$ tal que g no tiene otras singularidades en $D^*(b,\delta)$ y g es acotada en $D^*(b,\delta)$, además podemos suponer $0 \notin D(b,\delta)$.

Consideremos la rama de $\sqrt{z}$ que toma el valor b en el punto a (la otra rama toma el valor $-b$).

Esta rama (la llamamos $R(z)$) es holomorfa en $D(a,|a|)$ y $R(a) = b$ así existe $\rho > 0$ ($\rho < |a|$) tal que $R(D(a,\rho)) \subset \overline{D(b,\delta/2)}$, y para $u \in D^*(a,\rho)$ se verifica que:

$$f(u) = \frac{1}{R(u)} g(R(u))$$

así f es acotada en $D^*(a,\rho)$, pues $|R(u)| \geq |b| - \delta/2 > 0$ si $u \in D^*(a,\rho)$.

Caso 2. Un polo de multiplicidad p.

"$\Longrightarrow$" Supongamos que a es un polo de f de multz p.

e.d.
$$\lim_{z\to a} (z-a)^p f(z) = \mu \neq 0 \quad (\text{existe y es } \mu)$$

Si $z\neq b$: $(z-b)^p g(z) = (z-b)^p z f(z^2) =$
$$= \frac{(z+b)^p (z-b)^p z f(z^2)}{(z+b)^p}$$
$$= \frac{(z^2-a)\, z f(z^2)}{(z+b)^p}$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to b} (z-b)^p g(z) = \lim_{z\to b} \frac{(z^2-a)\, z f(z^2)}{(z+b)^p} =$$
$$= \frac{\mu b}{2^p b^p} = \frac{\mu}{2^p b^{p-1}} \neq 0$$

debido a la continuidad de $h(z) = z^2$

Por tanto g tiene un polo en b de multiplicidad p.

"$\Longleftarrow$" Supongamos que g tiene un polo en b de multiplicidad p.

Sea $\varphi(z) := (z-a)^m f(z)$

Entonces (recurriendo a las igualdades de la implicación anterior):
$$\varphi(z^2) = \frac{(z-b)^p (z+b)^p g(z)}{z} := \psi(z)$$

donde ψ es holomorfa en cierto disco $D(b,\delta)$, que no contiene al cero ($(z-b)^p g(z)$ tiene una singularidad evitable en b).

De nuevo, en cierto disco centrado en a tenemos una raíz cuadrada de la identidad, $R(z)$, holomorfa y tal que $R(a)=b$.

Luego existe $r>0$ tal que $R(D(a,r)) \subset D(b,\delta)$ y así

$$\varphi(z) = \psi(R(z)) \quad , \; z \in D(a,r)$$

lo que prueba que $\varphi \in \mathcal{H}(D(a,r))$ e.d. a es un polo de f de orden p.

Caso 3. Singularidad esencial (sigue argumentos similares).

"$\Rightarrow$" Sea a una singularidad esencial de f. e.d.

no existe $\lim_{z\to a} f(z)$.

Si existiera $\lim_{z\to b} g(z) = \mu$. Entonces

$$\lim_{z\to a} f(z) = \lim_{z\to a} \frac{g(R(z))}{R(z)} = \frac{\mu}{b} \text{, contradicción}$$

$(R$ una raíz cuadrada holomorfa, $R(D(a,r)) \subset D(b,\delta))$

"$\Leftarrow$" Si g tiene una singularidad evitable en b, f la tiene en a, pues si existiera $\lim_{z\to a} f(z) = \lambda$, tendríamos

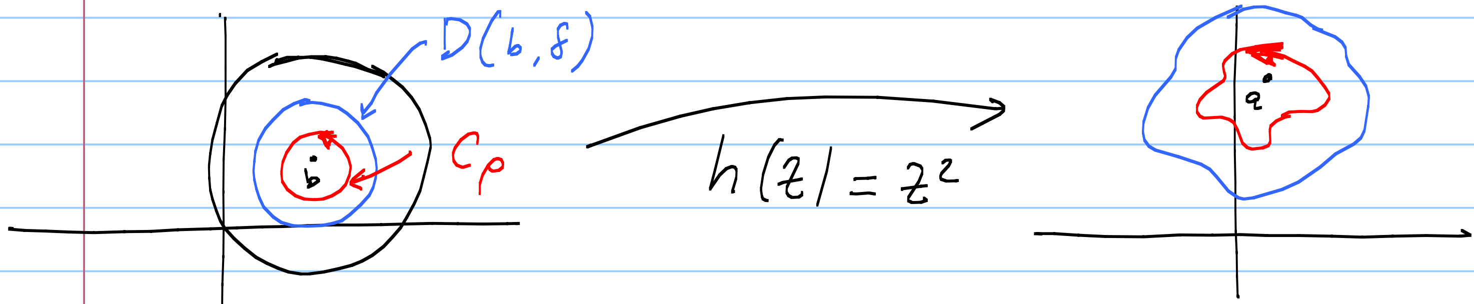
$$\lim_{z\to b} g(z) = \lim_{z\to b} z f(z^2) = b\cdot\lambda \text{, contradicción!}$$

Ahora probaremos que $\operatorname{Res}(g,b) = \frac{1}{2}\operatorname{Res}(f,a)$

Por definición, $\operatorname{Res}(g,b) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} g(z)\,dz$

donde $C_\rho(\theta) = b+\rho e^{i\theta}$, $\theta\in[0,2\pi]$, $\operatorname{Im} C_\rho \subset D^*(b,r) \subset \mathbb{C}\setminus B$.

Tomemos ρ tal que $\overline{D(b,\rho)} \subset D(b,\delta) \subset D(b,|b|)$.



Utilizando el ejercicio 1 de la sección 6:

$$2\pi i \operatorname{Res}(g,b) = \int_{C_\rho} g(z)\,dz = \int_{C_\rho} f(z^2)\cdot z\,dz = \int_{C_\rho} f(h(z))\frac{1}{2}h'(z)\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{h(C_\rho)} f(z)\,dz = \frac{1}{2}\int_{C_\rho^2} f(z)\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\, 2\pi i \operatorname{Res}(f,a)\cdot \operatorname{Ind}(C_\rho^2, a)$$

donde $C_\rho^2(\theta) := h(C_\rho(\theta)) = (a+\rho e^{i\theta})^2$.

Pero $\operatorname{Ind}(C_\rho^2,a) = \operatorname{Ind}(C_\rho^2 - a, 0) = \operatorname{Ind}(C_\rho^2 - b^2, 0) =$

$= \operatorname{Ind}((C_\rho - b)\cdot(C_\rho+b), 0) = \operatorname{Ind}(C_\rho - b, 0) + \operatorname{Ind}(C_\rho+b, 0)$

Pero claramente $\operatorname{Ind}(C_\rho+b, 0) = \operatorname{Ind}(C_\rho, -b) = 0$

y $\operatorname{Ind}(C_\rho - b, 0) = \operatorname{Ind}(C_\rho, b) = 1$

luego $\operatorname{Res}(g,b) = \frac{1}{2}\operatorname{Res}(f,a)$

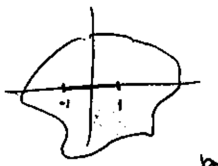
[redacted]

$f(z)$ raíz cúbica de $(z-1)(z+1)^2$ en $A = \mathbb{C}\setminus[-1,1]$ determinada por $f(2) = \sqrt[3]{9}$. (a) Obtener su desarrollo de Laurent en $\Omega = \{z\in\mathbb{C} : |z|>1\}$

(b) Calcular $\int_\gamma f(z)\,dz$ donde $\gamma(t) = 2\cos t + \frac{i}{2}\operatorname{sen} t \quad t\in[0,2\pi]$.

Sol. Sea $p(z) = (z-1)(z+1)^2$ y $\Omega = \mathbb{C}\setminus[-1,1]$.

$\Rightarrow \forall\gamma$ camino cerrado en Ω se tiene:



$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{p'(z)}{p(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left(\frac{1}{z-1}+\frac{2}{z+1}\right)dz = \operatorname{Ind}(\gamma,1)+2\operatorname{Ind}(\gamma,-1) = 3\operatorname{Ind}(\gamma,1) = \dot{3}$$

pues $1,-1$ pertenecen a la misma componente conexa de $\mathbb{C}\setminus \operatorname{Im}(\gamma)$

Así, como $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{p'(z)}{p(z)}dz = \dot{3}$ $\forall\gamma$ camino cerrado en Ω $\Rightarrow$ En Ω existe raíz cúbica holomorfa de p.

~~$f(z) = z(1+z)^{2/3}(z-1)^{1/3}$ es una raíz cúbica de~~

(a) $p(z) = z^3(1-1/z)(1+1/z)^2$. Entonces una raíz cúbica de $p(z)$ en A es:

$$f(z) = \omega_3 z\,(1-1/z)^{1/3}(1+1/z)^{2/3} = z\,S_{1/3}(-1/z)\,S_{2/3}(1/z), \text{ donde } \omega_3^3=1.$$

$$\left(S_\alpha(u) = (1+u)^\alpha\right).$$

está bien definida, pues $\left|\frac{1}{z}\right|<1$ si $z\in A$.

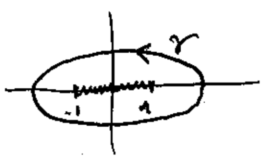
$$\Rightarrow f(z) = z\omega_3\cdot z\left(\sum_{n=0}^\infty \binom{1/3}{n}(-1)^n\frac{1}{z^n}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^\infty\binom{2/3}{n}\frac{1}{z^n}\right) \text{ es el des. de Laurent.}$$

$$f(2) = \omega_3\cdot 2\cdot(1-1/2)^{1/3}(1+1/2)^{2/3} = \omega_3\cdot 2\,\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{4}} = \omega_3\cdot\sqrt[3]{9} \Rightarrow \omega_3 = 1$$

y $f(z) = z\,S_{1/3}(-1/z)\,S_{2/3}(1/z)$ es la rama buscada.

Observación. Esta rama coincide con la rama que existe en $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$, pero sólo está definida en Ω

(b) $\gamma(t) = 2\cos t + \frac{i}{2}\operatorname{sen} t$ es la elipse centrada en 0 de semiejes 2 y $1/2$.



γ es un camino Ω-homólogo a la circunferencia $C_2(t) = 2e^{it}$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$$

. Obsérvese que f no es holomorfa en $D(0,2)$ y que C_2 no es Ω-homólogo a 0, luego la integral no la podemos calcular ni con el teor. de Cauchy ni con el de los residuos.

Ahora, como tenemos el desarrollo de Laurent de f, la integral será igual a $2\pi i a_{-1}$, siendo a_{-1} el coeficiente de $1/z$ en el desarrollo, y esto porque este término es el único que no tiene primitiva en $D(0,2)$ y así el único que no anula la integral. En resumen:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} f(z)\,dz = a_{-1}$$

Calculamos a_{-1}:

$$f(z) = z\left[\binom{1/3}{0} - \binom{1/3}{1}\frac{1}{z} + \binom{1/3}{2}\frac{1}{z^2} + \dots\right]\left[\binom{2/3}{0} + \binom{2/3}{1}\frac{1}{z} + \binom{2/3}{2}\frac{1}{z^2} + \dots\right]$$

$$a_{-1} = \binom{1/3}{0}\binom{2/3}{2} + \binom{1/3}{2}\binom{2/3}{0} - \binom{1/3}{1}\binom{2/3}{1} = \frac{2/3\left(\frac{2}{3}-1\right)}{2} + \frac{1/3\left(1/3-1\right)}{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} =$$

$$= -\frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \frac{2}{9} = -\frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \underline{\int_\gamma f(z)\,dz = -\frac{8\pi i}{9}}.$$

(c) <u>Probar que si $r>1$, $\rho>1$</u> $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}\int_{C_\rho} z^{n-1} f(z)\,dz = 0$

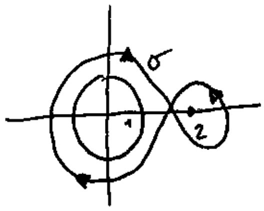
<u>Sol</u>.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}\int_{C_\rho} z^{n-1} f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}\int_{C_\rho} z^{n-1}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k\,dz = \left(\begin{array}{c}\text{convergencia}\\ \text{uniforme en } C_\rho\end{array}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}\,2\pi i\cdot a_{-n} = \lim_{n\to\infty} 2\pi i\left(\frac{a_{-n}}{r^n}\right) = 0$$

pues el desarrollo converge en $|z|>1$ y así, $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{0} a_k r^k$ converge, luego el término general tiende a 0.

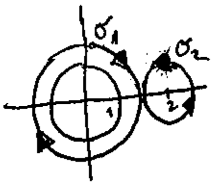
(c) Calcular $\displaystyle\int_\sigma \frac{f(z)}{z-2}\,dz$ donde σ es el camino de la figura



<u>Sol</u>. $\mathrm{Ind}(\sigma,1) = \mathrm{Ind}(\sigma,-1) = -1$, $\mathrm{Ind}(\sigma,2) = 1$.

Podemos sustituir σ por un ciclo que sea $\tilde{\Omega}$-homólogo a σ; (Ver <u>Nota</u>)

por ejemplo, $\Gamma = \sigma_1 \oplus \sigma_2$ $\quad\sigma_1(t) = \frac{3}{2}e^{-it}$, $\sigma_2(t) = 2+\frac{1}{2}e^{it}$ $\quad t\in[0,2\pi]$.



$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{f(z)}{z-2}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1}\frac{f(z)}{z-2}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_2}\frac{f(z)}{z-2}\,dz$$

σ_2 es Ω-homólogo a 0 $\overset{\text{T. Cauchy}}{\Rightarrow}$ $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_2}\frac{f(z)}{z-2}\,dz = f(2) = \sqrt[3]{9}$

Para calcular $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1}\frac{f(z)}{z-2}\,dz$ debemos recurrir al desarrollo de Laurent en $1<|z|<2$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1/2}{1-z/2} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

<u>Nota</u> $\tilde{\Omega} = \Omega\setminus\{2\} = \{z\in\mathbb{C} : |z|>1\}\setminus\{2\}$. σ y Γ son $\tilde{\Omega}$-homólogos y puesto que $\frac{f(z)}{z-2}\in\mathcal{H}(\tilde{\Omega})$, el th. general de Cauchy afirma $\displaystyle\int_\sigma \frac{f(z)}{z-2} = \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(z)}{z-2} = z\left[\binom{1/3}{0} - \binom{1/3}{1}\frac{1}{z} + \binom{1/3}{2}\frac{1}{z^2} + \dots\right]\left[\binom{2/3}{0} + \binom{2/3}{1}\frac{1}{z} + \binom{2/3}{2}\frac{1}{z^2} + \dots\right]\left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}z - \dots\right]$$

$b_{-1} =$ una serie no calculable explícitamente (en el producto hay infinitos términos en $\frac{1}{z}$)

¡Pero! podemos hacer como sigue: el ciclo $\hat{\Gamma} = \sigma_1 \oplus C_3$ $\quad C_3(t) = 3e^{it}$ es Ω-homólogo a cero.

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1} \frac{f(z)}{z-2}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_3} \frac{f(z)}{z-2}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\hat{\Gamma}} \frac{f(z)}{z-2}dz = f(2)\,!$$

Ahora $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_3} \frac{f(z)}{z-2}dz$ es calculable, pues podemos desarrollar a Laurent en $|z|>2$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1/z}{1-2/z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}.$$

$$\Rightarrow \frac{f(z)}{z-2} = z\left[\binom{1/3}{0} - \binom{1/3}{1}\frac{1}{z} + \binom{1/3}{2}\frac{1}{z^2} + \dots\right]\left[\binom{2/3}{0} + \binom{2/3}{1}\frac{1}{z} + \binom{2/3}{2}\frac{1}{z^2} + \dots\right]\left[\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \dots\right] \quad (\text{Nota})$$

$$\rightarrow b_{-1} = \binom{1/3}{0}\binom{2/3}{1} - \binom{1/3}{1}\binom{2/3}{0} + 2\binom{1/3}{0}\binom{2/3}{0} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1}\frac{f(z)}{z-2}dz = f(2) - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_3}\frac{f(z)}{z-2}dz = \sqrt[3]{9} - \frac{7}{3}$$

Finalmente: $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma}\frac{f(z)}{z-2}dz = \sqrt[3]{9} - 7/3 + \sqrt[3]{9} = 2\sqrt[3]{9} - \frac{7}{3} = \frac{2\sqrt[3]{9}\cdot 3 - 7}{3}$

Nota La diferencia con la situación anterior es que ahora tenemos un desarrollo de Laurent de $\frac{1}{z-2}$ y no un desarrollo en serie de potencias $\rightarrow$ Sólo un nº finito de términos en $\frac{1}{z}$.

¡Otra forma! $\boxed{\text{Invirtiendo el camino.}}$ ← UNA TÉCNICA DISTINTA.

En general: $\displaystyle\int_\gamma h(w)\,dw = \int_a^b h(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$ $\quad \sigma(t)=\frac{1}{\gamma(t)} \quad \sigma'(t) = -\frac{\gamma'(t)}{\gamma^2(t)}$

$$\to \int_\gamma h(w)\,dw = -\int_a^b h\left(1/\sigma(t)\right)\frac{\sigma'(t)}{\sigma^2(t)}\,dt = -\int_\sigma \frac{h(1/z)}{z^2}\,dz$$

$$\Rightarrow \int_{\sigma_1}\frac{f(z)}{z-2}\,dz = -\int_{1/\sigma_1}\frac{f(1/z)}{z^2(1/z-2)}\,dz = -\int_{1/\sigma_1}\frac{1/z\; S_{1/3}(-z)\,S_{2/3}(z)}{z^2(1/z-2)}\,dz =$$

$(1/\sigma_1 \subset \Omega)$

$$= \int_{1/\sigma_1}\frac{S_{1/3}(-z)\,S_{2/3}(z)}{z^2(2z-1)}\,dz$$

$g(z) = \dfrac{S_{1/3}(-z)\,S_{2/3}(z)}{z^2(2z-1)}$ es holomorfa en $D(0,1)\setminus\{0,1/2\}$.

$\dfrac{1}{\sigma_1} = \dfrac{2}{3}e^{-it}$, $t\in[0,2\pi]$. $\quad 0, 1/2 \in D(0,2/3)$.

($1/\sigma_1$ es $D(0,1)$-homólogo a 0).

→ Utilizando el teorema de los residuos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{1/\sigma_1} g(z)\,dz = \mathrm{Ind}(1/\sigma_1,0)\cdot\mathrm{Res}(g,0) + \mathrm{Ind}(1/\sigma_1,1/2)\cdot\mathrm{Res}(g,1/2) = \mathrm{Res}(g,0)+\mathrm{Res}(g,1/2)$$

Calculamos residuos

$\dfrac{S_{1/3}(-z)\,S_{2/3}(z)}{z^2}$ es holomorfa en un entorno de $1/2$, y $\dfrac{1}{2z-1}$ tiene un polo simple en $1/2$:

$$\Rightarrow \mathrm{Res}(g,1/2) = \frac{S_{1/3}(-1/2)\,S_{2/3}(1/2)}{1/4}\cdot\mathrm{Res}\left(\frac{1}{2z-1},1/2\right) = \sqrt[3]{1/2}\cdot\sqrt[3]{9/4}\cdot 4\cdot\frac{1}{2} = \sqrt[3]{9}$$

$$\left(\frac{1}{2z-1} = \frac{1/2}{z-1/2} \Rightarrow \mathrm{Res}\left(\frac{1}{2z-1},1/2\right) = 1/2\right).$$

$$g(z)=\frac{S_{1/3}(-z)\,S_{2/3}(z)}{z^2(2z-1)} = \frac{1}{2z-1}\,\frac{1}{z^2}\left[a_0+a_1z+a_2z^2+\dots\right]\left[b_0+b_1z+b_2z^2+\dots\right]$$

$$\cancel{= \frac{1}{2z-1}\,\frac{1}{z^2}\left[a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)z+\dots\right]}$$

$$\cancel{\Rightarrow \mathrm{Res}(g,0) = (-1)\cdot(a_0b_1+a_1b_0) = (-1)\cdot\left(\binom{1/3}{0}\binom{2/3}{1}+\binom{2/3}{0}\binom{1/3}{1}\right) = -1}$$

$$\frac{1}{2z-1} = -\frac{1}{1-2z} = -\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n.$$

$$\to \quad g(z) = -\frac{1}{z^2}\left[\binom{1/3}{0} - \binom{1/3}{1}z + \binom{1/3}{2}z^2 + \cdots\right]\left[\binom{2/3}{0} + \binom{2/3}{1}z + \binom{2/3}{2}z^2 + \cdots\right]\left[1 + 2z + \cdots\right]$$

$$\mathrm{Res}(g,0) = -\left(2\binom{1/3}{0}\binom{2/3}{0} - \binom{1/3}{1}\binom{2/3}{0} + \binom{1/3}{0}\binom{2/3}{1}\right) =$$

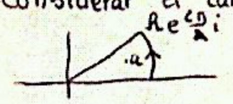
$$= -2 + \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{7}{3} \qquad !!$$

<u>En resumen</u>: $\displaystyle\int_{\sigma_1} \frac{f(z)}{z-2}\,dz = -\frac{7}{3} + \sqrt[3]{9}$

EJERCICIO 8.- Calcular las siguientes integrales justificando su convergencia:

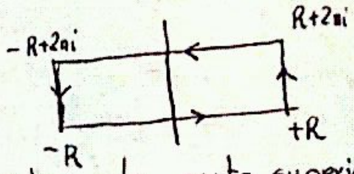
X i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\, dx$ (Indicación: Considerar $\dfrac{e^{iaz} - e^{ibz}}{z^2}$)

X ii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^n}.$ (Indicación, Considerar el camino cerrado γ



$a = e^{\pi/n\, i}$)

X iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x + e^{2x}}$ $0 < a < 2$ (Indicación: Considerar el camino



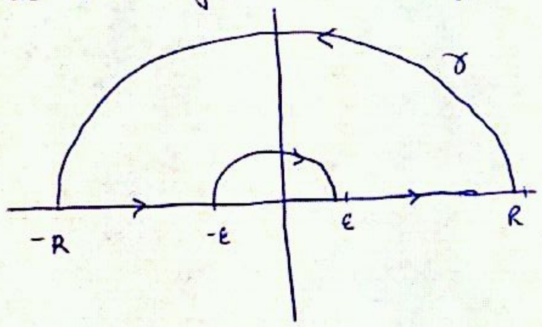
(v) Integrando $f(z) = (\log z)^2 (z^2 + a^2)^{-1}$ sobre la parte superior de la corona $\{ z : r < |z| < R \}$ $0 < r < a < R$. probar que,

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\log x)^2}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{\pi}{8a}\left[\pi^2 + 4(\log a)^2\right].$$

Resolución:

i) $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\, dx$ es una integral claramente convergente. $a>0, b>0$.

Consideremos la función $f(z) = \dfrac{e^{i\cancel{b}az} - e^{iaz}}{z^2}$. Calculamos la integral de esta función a lo largo del camino que se indica. Se tiene por el teorema de los residuos que



$$0 = \int_\gamma f(z)dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{R} - \int_{C_\varepsilon} + \int_{C_R}$$

Se sabe que,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_\varepsilon} f(z)\, dz = i\pi \operatorname{Res}(f, 0)$$

ya que la función presenta un polo simple en $z=0$. Por otra parte se tiene que

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{e^{i\cancel{b}aRe^{i\theta}} - e^{ibRe^{i\theta}}}{R^{\cancel{2}} e^{i\cancel{2}\theta}}\, i\cancel{Re^{i\theta}}\, d\theta\right| \xrightarrow[R \to \infty]{} 0.$$

Así se tiene que,

$$+\pi i \operatorname{Res}(f, 0) = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{iax} - e^{ibx}}{x^2}\, dx + \int_0^{+\infty} \frac{e^{iax} - e^{ibx}}{x^2}\, dx =$$

$$= 2\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\, dx + iK.$$

Se tiene así que,

$$\frac{e^{iaz}-e^{ibz}}{z^2} = \frac{\left(1+iaz-\frac{a^2z^2}{2!}+\dots\right)-\left(1+ibz-\frac{b^2z^2}{2!}+\dots\right)}{z^2} =$$

$$= \frac{i(a-b)}{z} - \frac{a^2-b^2}{2!} + \dots$$

Así $\operatorname{Res}(f(z),0) = i(a-b)$. Por lo tanto se tiene que

$$2\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} = \pi i (a-b) i = \pi(b-a). \quad \#$$

ii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} < +\infty$ para $n \geq 2$. Parametrizando γ se tiene que.

$$\int_\gamma \frac{dz}{1+z^n} = \int_0^R \frac{dx}{1+x^n} - e^{\frac{2\pi i}{n}} \int_0^R \frac{dx}{1+x^n} + \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{iRe^{i\theta}}{1+R^n e^{i\theta}}\, d\theta = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^n}, e^{\frac{\pi}{n} i}\right)$$

Por otra parte para $R > 1$

$$\left| \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{iRe^{i\theta}}{1+R^n e^{i\theta}}\, d\theta \right| \leq \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{R\, d\theta}{R^n - 1} = \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{R}{R^n-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \qquad n>1.$$

Resulta que $\frac{2\pi}{n} \cdot \frac{R}{R^n-1} \longrightarrow 0$ para $R \to \infty$ y por lo tanto queda que

$$\left(1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}\right) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^n}, e^{\pi/n\, i}\right) = \frac{1}{n\, e^{\pi/n\, i \cdot (n-1)}} =$$

$$= \frac{e^{\pi/n\, i(1-n)}}{n} =$$

$$= -\frac{a}{n}.$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{2\pi i\, a}{n(a^2-1)} \quad \#$$

P1.- (a) Justificación convergencia: en 0 existe $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$ $\boxed{0'5\text{ p.}}$

en ∞ $\left|\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\right| \le 1/x^2$

(b) $f(z) = \frac{e^{i2z}-1}{z^2} = \frac{2i}{z} +$ "holomorfa" luego tiene un polo simple $\boxed{0'25\text{ p}}$ con $\operatorname{Res}(f,0) = 2i$ $\boxed{0'25\text{ p}}$

(c) $\operatorname{Real}\left(\frac{e^{2ix}-1}{x^2}\right) = -\frac{2\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$ y así

$$0 = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{2ix}-1}{x^2}dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{2ix}-1}{x^2}dx - \int_{C_\varepsilon} f(z)dz + \int_{C_R} f(z)dz.$$

$C_\varepsilon(\theta) = \varepsilon e^{i\theta}$, $\theta \in [0,\pi]$.

conduce a: conocido $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_\varepsilon} f(z)dz = l$ $\boxed{0'5\text{ p}}$

$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = L_1$

Entonces tomando partes reales se tiene $2\operatorname{Re}\left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{2ix}-1}{x^2}dx\right) = \operatorname{Re}(l + L_1)$ i.e.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}dx = \frac{\operatorname{Re}(l+L_1)}{-4}.$$

(d) Calculo de límites $\boxed{0'25\text{p}}$ d1.- $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_\varepsilon} f(z)dz = \pi i(2i) = -2\pi.$

$\boxed{0'5\text{p}}$ d2.- $\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{e^{2i(Re^{i\theta})}-1}{z^2} d\theta\right| \le \int_0^{\pi} \frac{(1+e^{-2R\operatorname{sen}\theta})}{R^2} R\, d\theta \le$

$\le \int_0^{\pi} \frac{2d\theta}{R} = \frac{2\pi}{R} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$

(e) Resultado: $\left[\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}dx = \frac{-2\pi}{-4} = \pi/2\right]$ $\boxed{0'25\text{ p}}$

P3.- ✓ Indicar un abierto $\Omega \supset D(0,1)$ $\Omega \neq D(0,1)$ conexo en el que se pueda asegurar $\exists f \in \mathcal{H}(\Omega)$ $f(0)=0$, $f'(0)=1$ y $(f'(z))^2 = \frac{1}{1-z^2}$ ∴ cualquier abierto simplemente conexo $\Omega \supset D(0,1)$ en el que $+1,-1 \notin \Omega$. $\boxed{0'5\text{ p}}$

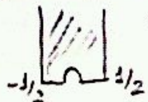
✓ Si Ω es conexo las cond. anteriores determ univocamente f: Si $g(z)$ satisface las condiciones $\leadsto$ $g'(z) = \pm f'(z)$ pero $f'(0) = g'(0) = 1 \leadsto g'(z) = f'(z) \leadsto$ Ω conexo $g(z) = f(z) + cte \overset{f(0)=0=g(0)}{\leadsto} g(z) = f(z)$ $\forall z \in \Omega$
$\boxed{0'5\text{p}}$

✓ Como $f'(0) = 1 \neq 0$, en un entorno $D(0,\delta)$ f es inyectiva. Ponemos $h(z) = \operatorname{sen} f(z)$ Observar $h(0) = 0 \leadsto$ $\exists_{0<\varepsilon<\delta} D(0,\varepsilon)$ t.q. $h(D(0,\varepsilon)) \subset D(0,\delta)$. Si probamos que $f \circ h = f$ en $D(0,\varepsilon)$ por ser f inyectiva $\leadsto$ $h(z) = z$ para cada $z \in D(0,\varepsilon) \leadsto h(z) = z$ $\forall z \in \Omega$. Se comprueba que $f \circ h$ en $D(0,\varepsilon)$ satisface las condiciones de f y estas condiciones tambien determinan univocamente f en $D(0,\varepsilon)$. $\boxed{1\text{ p}}$

P2.- I) Determinar sing y naturaleza: $0'25 + 0'25 = \boxed{0'75\text{p}}$

II) Calcular residuo: $0'25$ (en cero) en $\mathbb{Z}$ ($= \boxed{0'75\text{p}}$

III) Es suficiente acotarlo en



ya que $|\operatorname{cotg}\pi(-z)| = |\operatorname{cotg}\pi z|$ $|\operatorname{cotg}\pi(z+1)| = \operatorname{cotg}\pi z$

En este recinto es acotada pues

$$|\pi\operatorname{cotg}\pi z| = \left|\pi i\left[1 + \frac{2}{e^{2\pi i z}-1}\right]\right| \le \pi\left(1 + \frac{2}{1-e^{-2\pi y}}\right) \le 5\pi \quad y \gg \text{grande}$$

$z = x+iy$.

$= \boxed{\cancel{0'25}}$ $\boxed{1\text{p}}$

75 EXTRA

IV) $\int_{C_n} \frac{f(z)}{z^2}dz = 2\pi i \sum_{k=-n}^{n} \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{z^2}, k\right) = \operatorname{Res}(f/z^2, 0) + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

$\begin{cases} -\lim_n \int_{C_n} f/z^2 = 0 - \boxed{0'25\text{ p}} \\ -\operatorname{Res}(f/z^2, 0) = -\pi^2/3 \end{cases}$ $\boxed{0'25\text{p}}$

$C_n = (n+1/2)e^{it}$. $\boxed{0'25\text{p}}$

$\leadsto \boxed{\sum^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6}$

EJERCICIO 17.- Calcular $\int_\gamma z^2 \cos \frac{1}{z-1}\, dz$ donde $\gamma(\theta) = \frac{2e^{i\theta}}{1+2e^{i\theta}}$ $\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

Resolución:

La función $z^2 \cdot \cos \frac{1}{z-1} \in \mathcal{H}(\mathbb{C} - \{1\})$.

Por otra parte la transformación de Möbius $Tw = \frac{2w}{1+2w}$ transforma el circulo unidad en un circulo que no pasa por 1. Así el camino γ es $\mathbb{C}$-homologo a cero no pasando por la singularidad de la función, y en consecuencia por el teorema de los residuos se tiene que,.

$$\int_\gamma z^2 \cdot \cos \frac{1}{z-1}\, dz = 2\pi i \ \operatorname{Res}\left(z^2 \cos \frac{1}{z-1}, 1\right) \cdot I(\gamma, 1)$$

$$\operatorname{Res}\left(z^2 \cos \frac{1}{z-1}, 1\right) = -1.$$

Por otra parte. llamando $\varphi(z) = \frac{2z}{1+2z}$. $\quad c(\theta) = e^{i\theta}$

$$I(\gamma, 1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi \circ c} \frac{dz}{z-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)-1}\, dz = \sum_{a \in Z(\varphi(z)-1)} I(\gamma, a) - \sum_{b \in P(\varphi(z)-1)} I(\gamma, b)$$

Ahora bien la función

$$\varphi(z) - 1 = \frac{2z}{1+2z} - 1 = \frac{-1}{1+2z}.$$

Solo presenta un polo simple en $z = -1/2$, y por lo tanto $I(\gamma, 1) = -1$

Así queda que

$$\int_\gamma z^2 \cos\left(\frac{1}{z-1}\right) dz = 2\pi i \qquad \#$$

C2.157

TEOREMA DE ROUCHE.

EJERCICIO 9.- Probar que para n suficientemente grande, todos los ceros del polinomio $1+2z+\dots+nz^{n-1}$ estan en $\rho \leq |z|$ $(\rho<1)$.

Resolución: Pongamos $P_n(z) = 1+2z+\dots+nz^{n-1}$ y observemos que si $Q_n(z) = 1+z+z^2+\dots+z^n$, entonces

$$Q_n'(z) = P_n(z)$$

Como sabemos se tiene que

$$\sum_{m=0}^{\infty} z^m = \frac{1}{1-z} \qquad \text{si } |z|<1$$

La serie de las derivadas cumple

$$\lim_n P_n(z) = \sum_{m=1}^{\infty} m z^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2} \qquad |z|<1$$

siendo la convergencia uniforme sobre compactos. Así si $\rho<1$ $\overline{D(0,\rho)} \subset D(0,1)$) y por lo tanto para $\varepsilon>0$ dado, existe m_1:

$$m \geq m_1 \qquad \left|P_m(z) - \frac{1}{(1-z)^2}\right| < \varepsilon \qquad \forall z \in \overline{D(0,\rho)}$$

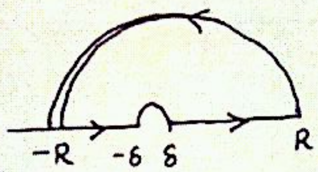
Tomamos $0 < \varepsilon = \min\left\{ \frac{1}{|z-1|^2} : |z| = \rho \right\}$

Así se tiene que pare este $\varepsilon>0$, $\exists\, m_1$: $m \geq m_1$.

$$\left|P_m(z) - \frac{1}{(1-z)^2}\right| < \varepsilon = \min\left\{ \frac{1}{|1-z|^2} : |z|=\rho \right\} \leq \frac{1}{|1-z|^2} \quad |z|=\rho$$

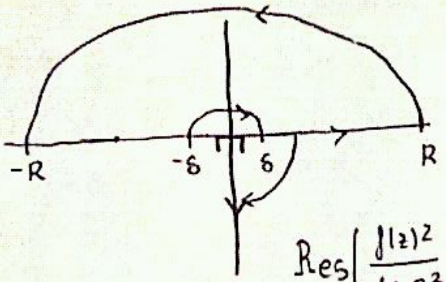
Aplicando ahora el teorema de Rouché se deduce que $P_m(z)$ no tiene ceros en $D(0,\rho)$ ya que $\frac{1}{(1-z)^2}$ no lo tiene. #

CAlcúlese $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\log x)^2}{1+x^2}\,dx \;\left(= \pi^3/8\right)$ integrando sobre el camino



y haciendo $\rho \to 0$ y $R \longrightarrow +\infty$.

Resolución.- Consideremos $f(z) = \ln|z| + i\arg(z)$ donde $\arg(z) \in \left(-\pi/2, 3\pi/2\right)$ y así tenemos que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{ti:\ t \leq 0\})$ y así tenemos que



$g(z) = \dfrac{f(z)^2}{1+z^2} \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{ti:\ t \leq 0\})$ teniendo un polo en $z = i$, siendo en este punto

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f(z)^2}{1+z^2}, i\right) = \lim_{z\to i} \cancel{(z-i)} \frac{f(z)^2}{\cancel{(z-i)}(z+i)} = \frac{f(i)^2}{2i} = \frac{(i\,\pi/2)^2}{2i} = -\frac{\pi^2}{8i}.$$

Así,

$$(*) \quad \int_{-R}^{-\delta} \frac{(\ln|x| + i\pi)^2}{1+x^2}\,dx + \int_{C_\delta} g(z)\,dz + \int_\delta^R \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,dx + \int_{C_R} g(z)\,dz = 2\pi \cancel{i}\left(-\frac{\pi^2}{8\cancel{i}}\right) = -\frac{\pi^3}{4}.$$

$$\left|\int_{C_R} g(z)\,dz\right| \leq \int_0^\pi \frac{\left(\ln R + \frac{3\pi}{2}\right)^2}{R^2-1} R\,d\theta = \pi R \frac{\left(\ln R + \frac{3\pi}{2}\right)^2}{R^2-1} \longrightarrow 0 \quad R \longrightarrow +\infty.$$

$$\left|\int_{C_\delta} g(z)\,dz\right| \leq \int_0^\pi \frac{\left(\frac{3\pi}{2} + \ln\delta\right)^2}{1-\delta^2} \delta\,d\theta = \pi\delta \frac{\left(\frac{3\pi}{2} + \ln\delta\right)^2}{1-\delta^2} \longrightarrow 0 \quad \delta \longrightarrow 0 \text{ ya que } \delta(\ln\delta)^n \longrightarrow 0 \text{ si } \delta \to 0$$

Así las cosas tomando limites $\delta \to 0$ y $R \to \infty$ en $(*)$ e igualando parte real y parte imaginaria, se obtiene que:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{(\ln|x|)^2}{1+x^2}\,dx - \int_{-\infty}^0 \frac{\pi^2}{1+x^2}\,dx + \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,dx = -\pi^3/4$$

de donde

$$\int_{+\infty}^0 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}(-dx) - \int_\infty^0 \frac{\pi^2}{1+x^2}(-dx) + \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,dx = -\pi^3/4$$

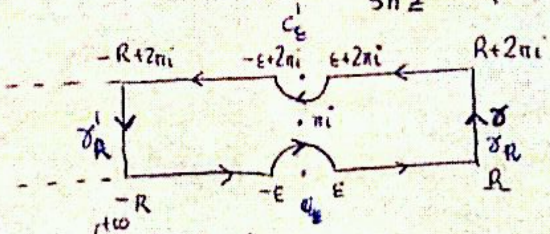
$$2\int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,dx = \pi^2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} - \pi^3/4 = \pi^2 \cdot \frac{\pi}{2} - \pi^3/4 = \pi^3/4 \Rightarrow$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\,dx = \pi^3/8 \quad \#$$

Generated by CamScanner from intsig.com

C2.183 Integrales por residuos.

EJERCICIO.- Considerando la función $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{sh\, z}$ y el camino indicado en la figura



calcular la integral $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{sen\,x}{sh\,x}\,dx$.

Resolución.- $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{sh\,z}$ $\quad f\in H(\mathbb{C}_1)$, $\quad P(f)=\{n\pi i:\ n\in\mathbb{Z}\}$

Efectivamente $sh\,z=0 \iff e^{z}+e^{-z}=0 \iff e^{2z}=1 \iff 2z\in\{2m\pi i:\ m\in\mathbb{Z}\}$.

La única singularidad rodeada por el camino es πi; por el teorema de los residuos se tiene que

$$2\pi i\ Res(f,\pi i)=\int_\gamma f(z)\,dz.$$ Llamando $C_\varepsilon(\theta)==\varepsilon e^{-i\theta}\quad \theta\in[\pi,2\pi]$

$C_\varepsilon'(\theta)=2\pi i+\varepsilon e^{-i\theta}\quad \theta\in[0,\pi]$

$$2\pi i\ Res(f,\pi i)=\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{e^{ix}}{sh\,x}dx+\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{ix}}{sh\,x}dx-\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{e^{i(x+2\pi i)}}{sh(x+2\pi i)}dx-\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{i(x+2\pi i)}}{sh(x+2\pi i)}dx+\int_{C_\varepsilon}f(z)dz+\int_{C_\varepsilon'}f(z)dz+$$
$$+\int_{\gamma_R}f(z)dz+\int_{\gamma_R'}f(z)dz.$$

Se tiene, dado que f tiene un polo simple en $0,\ 2\pi i$ que

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{C_\varepsilon}f(z)dz=-\pi i\,Res(f,0)\qquad \lim_{\varepsilon\to0}\int_{C_\varepsilon'}f(z)dz=-\pi i\,Res(f,2\pi i).$$

De otra parte
$$\int_{\gamma_R}f(z)\,dz=\int_0^{2\pi}i\,\frac{e^{i(R+xi)}}{sh\,(R+xi)}\,dx=2i\int_0^{2\pi}\frac{e^{iR}\cdot e^{-x}}{e^{R+xi}-e^{-R+xi}}\,dx$$ y tomando modulos

$$\left|\int_{\gamma_R}f(z)dz\right|\le 2\int_0^{2\pi}\frac{e^{-x}}{e^{R}-e^{-R}}\,dx=\frac{C}{e^{R}-e^{-R}}\longrightarrow 0$$ cuando $R\longrightarrow\infty$. Analogamente se razona con la integral $\displaystyle\int_{\gamma_R'}f(z)dz$. Se tiene tomando limites $\varepsilon\to0$, $R\to0$ que.

$$(1-e^{-2\pi})\ vp(0)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{sh\,x}\,dx=2\pi i\ Res(f,\pi i)+\pi i\,Res(f,0)+\pi i\,Res(f,2\pi i)$$

~~De donde~~ Para los residuos, calculamos $\dfrac{e^{iz}}{(sh\,z)'}=\dfrac{2\,e^{iz}}{e^{z}+e^{-z}}$.

$Res(f,0)=\dfrac{2}{2}=1$; $\quad Res(f,\pi i)=\dfrac{2\cdot e^{-\pi}}{-2}=-e^{-\pi}$; $\quad Res(f,2\pi i)=\dfrac{2e^{-2\pi}}{2}=e^{-2\pi}$

Así,
$$2(1-e^{-2\pi})\,\cancel{i}\int_0^{+\infty}\frac{sen\,x}{sh\,x}\,dx=-2\pi e^{-\pi}+\pi+\pi e^{-2\pi}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{sen\,x}{sh\,x}\,dx=\frac{\pi}{2}\,\frac{1-2e^{-\pi}+e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}}=\frac{\pi}{2}\,th\frac{\pi}{2}.\ \#$$